



A Fórmula dos Dinamarqueses Generalizada

Faiçal Massad

Prof. Titular Sênior - Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, faical.massad@usp.br

RESUMO: A fórmula dinâmica dos dinamarqueses para a estimativa da resistência estática de estacas é uma das mais utilizadas, segundo Likins et al (2012) e Vieira e Lopes (2021). Os seus autores, Sorensen e Hansen (1957), admitiram atrito lateral nulo e solo da ponta com comportamento elasto-plástico. Consideraram como válida a equação da energia, tomada como o trabalho da resistência estática, que foi inicialmente submetida a uma análise dimensional supondo também ponta fixa. Massad (2021) mostrou que essa equação é uma ficção, pois a energia efetiva depende das forças dinâmicas e não das resistências estáticas. Mas que, mesmo assim, fórmulas dinâmicas podem ser usadas como correlações empíricas ajustadas através de ensaios de carregamento dinâmico (High Strain Dynamic Tests – HSDST) numa dada obra. O artigo propõe generalizar a Fórmula dos Dinamarqueses, sem as hipóteses de atrito nulo e de ponta fixa. São feitas aplicações a casos de obras, envolvendo estacas de concreto e de aço, longas e curtas. Mostra-se que a aferição da fórmula generalizada com resultados de ensaios dinâmicos permite estimativas mais precisas da resistência estática de estacas, mesmo que sejam curtas, o que não se consegue com a fórmula original dos dinamarqueses.

PALAVRAS-CHAVE: estacas, fórmula dos dinamarqueses, resistência, ensaios dinâmicos.

ABSTRACT: The Danish Dynamic Formula for the estimation of the static resistance of piles is one of the most used worldwide, according to Likins et al (2012) and Vieira and Lopes (2021). The authors, Sorensen and Hansen (1957) admitted zero lateral friction and point resistance with an elasto-plastic behavior. They considered as valid the energy equation, taken as the work of static resistance, which was initially submitted to a dimensional analysis also assuming a fixed point. Massad (2021) showed that this energy equation is a fiction, because the effective energy depends on the dynamic forces and not on the static resistances. But that, even so, dynamic formulas can be used as empirical correlations adjusted through High Strain Dynamic Tests (HSDST) in each work. The paper proposes to generalize the Danish Formula, without the hypotheses of zero friction and fixed tip. Applications are made to case histories, involving short and long, concrete and steel piles. It is shown that the adjustment of the generalized formula with dynamic test results allows more accurate estimates of the static resistance of piles, even if they are short, which is not achieved with the original Danish Formula.

KEYWORDS: piles, Danish formula, resistance, dynamic tests.

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



1 Introdução

A fórmula dinâmica dos dinamarqueses é uma das mais utilizadas mundo afora, segundo vários estudiosos, entre os quais citam-se Likins et al (2012) e Vieira e Lopes (2021).

Com a notação comumente usada, ela pode ser escrita como indicado na equação (1):

$$R_d = \frac{\eta \cdot W \cdot h}{s + \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot \frac{\eta \cdot W \cdot h}{K_r}}} \quad \text{com } K_r = \frac{E \cdot S}{L} \quad (1)$$

onde R_d é a assumida resistência estática e K_r é a rigidez da estaca como peça estrutural (sem o solo). Os outros símbolos constam de lista em anexo.

Chama a atenção a raiz quadrada do segundo termo do denominador Equação (1), que representa a compressão elástica ou o repique elástico (K) da estaca sob a ação da energia efetivamente aplicada. A pergunta é: como os dinamarqueses chegaram a este termo?

Antes de responder a esta pergunta, note-se que a Eq. (1) pode ser re-escrita, usando a notação da monitoração dinâmica, como a Eq. (2) ou a (3), após algumas transformações.

$$R_d = R_{MX} = \frac{EMX}{s + 0,5 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{EMX}{K_r}}} = \frac{EMX}{s + 0,71 \cdot \sqrt{\frac{EMX}{K_r}}} \quad (2)$$

$$R_d = R_{MX} = \frac{2 \cdot EMX}{s + \left(s + \sqrt{2 \cdot \frac{EMX}{K_r}} \right)} = \frac{2 \cdot EMX}{s + (s + K)} = \frac{2 \cdot EMX}{s + DMX} \quad (3)$$

A última das Eq. (3) é a Energy Approach Equation de Paikowsky e Chernauskas (1992), sem o fator de correção $\kappa=0,8$, obtido experimentalmente por estes autores; ou a Equação de Aoki (1997), também sem o fator de correção $\zeta = 2 \cdot \kappa$, que pode variar entre 1 e 2.

2 A origem da Fórmula dos Dinamarqueses

Analisando o artigo de Sorensen e Hansen (1957) verifica-se que admitiram inicialmente estacas com ponta fixa ($s=0$), atrito lateral nulo e a equação da energia escrita como:

$$EMX = \frac{1}{2} \cdot R_d \cdot K \quad (4)$$

Com base numa análise dimensional, mas mais por intuição, postularam que:

$$R_d = \sqrt{2 \cdot EMX \cdot K_r} \quad \text{e} \quad K = \sqrt{2 \cdot \frac{EMX}{K_r}} \quad (5)$$

e, usando a equação da energia na sua forma completa, com a nega (s) mas atrito lateral nulo:

$$EMX = \frac{1}{2} \cdot R_d \cdot K + R_d \cdot s \quad (6)$$

chegaram à Equação (1) ou (2).

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



3 Generalização da Fórmula dos Dinamarqueses

Mas, como mostrou Massad (2021), EMX depende das forças dinâmicas (F), não tendo nada a ver com o trabalho da resistência estática, expressa usualmente pelas “equações de energia”, como as Equações (4) e (6). E que EMX pode ser escrita da seguinte forma:

$$EMX = \bar{F}_o \cdot DMX \quad (7)$$

onde \bar{F}_o é o valor médio de F_o (força dinâmica no topo) no intervalo de tempo entre 0 e o tempo para que $v_o=0$, isto é, velocidade nula no topo.

No mesmo trabalho Massad (2021) mostrou também que \bar{F}_o pode ser correlacionada empiricamente com EMX, através da expressão:

$$\bar{F}_o = a \cdot K_r \cdot DMX \quad (8)$$

Substituindo a Equação (8) em (7) resulta, após algumas transformações:

$$DMX = \lambda \cdot \sqrt{\frac{EMX}{K_r}} \quad \text{com } \lambda = \sqrt{\frac{1}{a}} \quad (9)$$

que tem a mesma forma da 2ª das Equações (5), postulada por Sorensen e Hansen.

A Equação (9) pode ser escrita de outra forma, a saber:

$$EMX = \lambda^{-2} \cdot K_r \cdot DMX^2 \quad (10)$$

que é a Equação de Querelli, permitindo estimativas de EMX com base em $DMX=K+s$ e, portanto, em medidas diretas de K e s dinâmicos. Tal fato foi mostrado exaustivamente por Querelli (2019) e Querelli e Massad (2019), que a comprovaram em termos estatísticos, envolvendo 12 casos de obras, com estacas de concreto e aço, e, mais recentemente, por Querelli e Souza (2023), trabalhando com estacas metálicas de 30 a 60m de comprimento.

A última das Equações (3) pode ser re-escrita da seguinte forma, tendo em vista a equação (9) e já com o fator de correção $\zeta = 2 \cdot \kappa$ de Aoki:

$$R_c = RMX = \zeta \cdot \frac{EMX}{s + \lambda \cdot \sqrt{\frac{EMX}{K_r}}} \quad (11)$$

onde R_c é a resistência estática dos Dinamarqueses generalizada. Note-se que se eliminou a hipótese de atrito lateral nulo e que a Eq. (2) dos dinamarqueses é um caso particular da Eq. (11), com $\zeta=1$ e $\lambda=0,71$.

Supondo estacas com nega $s \approx 0$ e substituindo a Equação (10) em (11) e, resulta:

$$R_c = \frac{\zeta}{\lambda^2} \cdot DMX \cdot K_r \quad (12)$$

que mostra que, mantido fixo o valor de λ , por exemplo, na extrapolação para estacas não

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



ensaiadas, a resistência R_c é diretamente proporcional a K_r e que, portanto, qualquer variação em E , módulo de elasticidade da estaca, afeta-a na mesma proporção. Tal constatação leva a crer que a Fórmula dos Dinamarqueses, em geral, se adequa melhor a estacas de aço, pois E é o mesmo para toda a estacaria.

4 Aplicação a casos de obras

Estacas de 5 obras, listadas na Tabela 1, foram submetidas a Ensaios de Carregamento Dinâmico (High Strain Dynamic Tests - HSDT). Vê-se que englobam estacas de vários tipos, de concreto (pré-moldadas e moldadas in loco) e de aço, com comprimentos variando de cerca de 5 a 43m e Rigidez (K_r) como peça estrutural de 300 a 10.000 kN/mm. Portanto, em 3 casos as estacas eram curtas ($L/B < 30$), no sentido introduzido por Vieira e Lopes (2021).

Tabela 1: Estacas de obras civis analisadas de per si (isoladamente) ou em conjunto

Caso	Local	Tipo de Estaca	Quantidade	Dimensões (B)(cm)	L (m)	L/B	K_r (kN/mm)	Referências
1	Brooklin-1 (SP)	Concreto centrifugado	1	De=50 Di=32	11,1	22	308	Machado (1995)
2	Santos (SP)	Tubada, concreto	1	De=80 Di=50	43,4	54	242	Valverde et al. (2018)
3	Cubatão-1 (SP)	Tubada, aço	1	De=91,4 Di=88,2	34	37	279	Valverde et al. (2018)
4	Osasco (SP)	Barrete	1	250x80	9,3	12	8.600	Valverde et al. (2018)
5	Sorocaba (SP)	Estação	3	D=110 e 120	4,8 a 6,5	~5	6.000 a 10.000	Valverde (2023)

4.1. Caso 1 (Brooklin, S. Paulo)

A estaca, de concreto centrifugado, com as dimensões indicadas na Tabela 1, era curta ($L/B < 30$) e foi submetida a Ensaio de Carregamento Dinâmico (HSDT), com energia crescente, no final de sua cravação. Foi utilizado martelo de gravidade de 51 kN, com a aplicação de 15 golpes, alturas de queda variando de 20 cm a 160 cm. O subsolo consistia em 1m de aterro, seguido de 1 m de argila porosa, mole, sobreposta a camadas de solo residual arenoso, com SPT médio ao longo do fuste de 4 e, na ponta, 7.

As Figuras 1-a e 1-b mostram como se chegou aos valores de ζ e de λ , e, a Figura 1-c, como R_d e R_c variaram em função dos RMX dos ensaios dinâmicos (HSDT). Nos outros casos será mantido o procedimento de exposição com estes três tipos de gráficos.

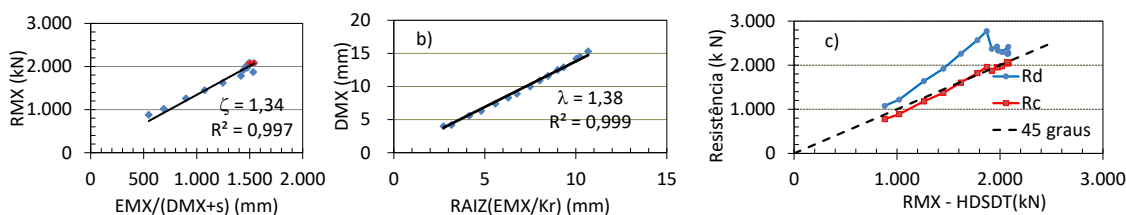


Figura 1: Caso 1, Brooklin 1 (SP)

Aponte a câmera do seu smartphone para o QR Code ao lado e salve o evento na sua agenda.



Neste Caso 1 houve ruptura, pois os valores de RMX permaneceram praticamente constantes nos 4 últimos golpes do martelo (pontos vermelhos na Figura 1-a). Ademais, as negas (s) variaram de 0,2 a 8 mm/golpes, crescente com o número de golpes do martelo. Vê-se que a aderência dos R_c aos RMX foi muito boa, o mesmo não ocorrendo com os R_d , exceto nos últimos golpes, mercê de s da ordem de 8mm, comparável a $K=7\text{mm}$.

4.2. Caso 2 (Santos, S. Paulo)

No caso 2, de um píer do Porto de Santos (SP), a estaca tubada de concreto era longa ($L/B > 30$). Ela foi cravada com um martelo hidráulico Junttan HHK com peso do pilão 160 kN e energia crescente, com alturas de queda de 20, 40, 60, 80, 100 e 120 cm.

Abaixo de 6m de coluna de água ocorria uma camada de 20 m de Argila SFL, do Holoceno, muito mole (SPT=1 a 5), seguida de 10m de areia argilosa fina (SPT=7 a 33) e 8m de Argila Transicional, do Pleistoceno (SPT~7), sobre espessa camada de areia (SPT~40).

Da análise da Figura 2-c conclui-se que os R_c são praticamente aderentes aos valores de RMX dos HSDST, com energia crescente, o mesmo não ocorrendo com os R_d . Neste caso as negas variaram de 0,1 a 1mm, muito menores do que os DMX da Figura 2-b, com relação $\zeta/\lambda \approx 1,65$, acima de $1/0,71=1,41$, o que, com base na Eqs. (2) e (12), justifica $R_d < R_c$.

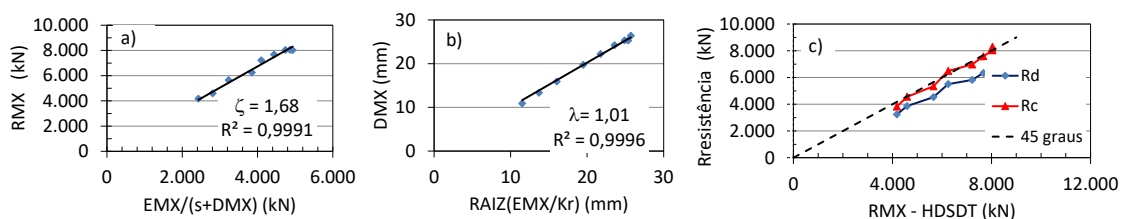


Figura 2: Caso 2, Santos (SP)

4.3. Caso 3 (Cubatão 1, S. Paulo)

Neste caso, a estaca foi cravada com um martelo hidráulico Junttan HHK com peso do pilão 90 kN e energia crescente, com alturas de queda de 20, 40, 60, 80, 100 e 120 cm.

O subsolo consistia de um aterro arenoso (SPT=1 a 10), sobre Argila de SFL (SPT=1 a 5), com até 24m de profundidade. Abaixo encontravam-se camadas de areia (SPT=15 a 30 e 30 a 15) até cerca de 40 m de profundidade, seguidas de solo residual de gnaiss.

Também aqui (ver a Figura 3-c) se conclui que os R_c são aderentes aos RMX dos HSDST, com energia crescente. As negas variaram entre 0 e 1mm/golpe e, ademais, obteve-se $\zeta/\lambda \approx 1,8$, bem acima de $1/0,71=1,41$, o que, com base na Eqs. (2) e (12), justifica $R_d < R_c$.

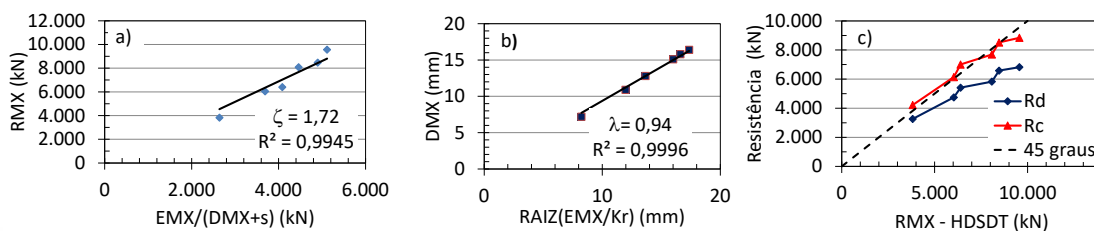


Figura 3: Caso 3, Cubatão-1 (SP)

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



4.4. Caso 4 (Osasco 1, S. Paulo)

A estaca barrete foi ensaiada com energia crescente, com martelo a gravidade, peso não informado, e alturas de queda de 44, 64, 84 e 104 cm; as negas variaram de 3 a 4 mm/golpe.

O perfil do subsolo é composto predominantemente por um silte argiloso, medianamente compacto a muito compacto, com SPT crescente com a profundidade, variando de 5 a 40.

As Figuras 4-a e 4-b mostram $\zeta \approx 1$ e $\lambda \approx 4,2$, gerando valores reduzidos dos R_c em relação aos R_d , como se constata da simples inspeção das Eqs. (11) e (2). Donde os R_d são muito maiores do que os R_c e dos RMX, que são aderentes entre si, como mostra a Figura 4-c. Note-se que a estaca barrete é “curta” ($L/B \approx 12 < 30$), confirmando observações de Vieira e Lopes (2021) sobre a limitação da Fórmula original dos Dinamarqueses nestas condições.

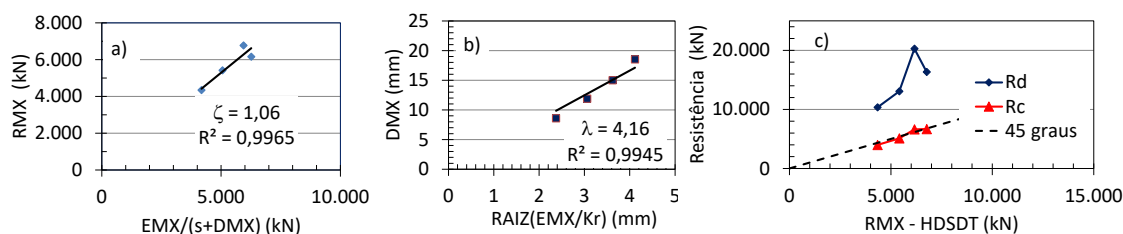


Figura 4: Caso 4, Osasco 1 (SP)

4.5. Caso 5 (Estações em Sorocaba, S. Paulo)

Os estações eram muito curtas ($L/B \approx 5 < 30$), com valores de K_r muito elevados, como mostra a Tabela 2, juntamente com outros dados. Os ensaios dinâmicos foram feitos com energia crescente, alturas de queda de 20, 40, 60, 80, 100, 120 e 140 cm, com a utilização de um sistema de percussão da Dynamic Hammers, Modelo DH-10000, equipado com martelo a gravidade, com peso de 100kN. As negas (s) variaram de 0,1 a 2 mm/golpe, exceto nos últimos golpes do Estação B, que se aproximou de 5. Não se têm informações do subsolo.

Tabela 2: Dimensões e dados relativos ao último golpe do martelo

Esta- ção	L (m)	D (m)	E (GPa)	K_r (kN/mm)	EMX (kN.m)	RMX (kN)	DMX (mm)	Nega (mm)	K_d (kN)	R_c (kN)
E	4,82	1,20	34,0	7.978	60,6	5.324	13,0	2,3	14.330	5.198
B	6,52	1,10	36,3	6.297	90,3	5.004	16,6	4,8	11.725	4.886
J	4,76	1,20	41,3	9.813	86,2	4.963	15,9	0,5	33.596	6.613

A Figura 5 mostra os valores obtidos para ζ , λ , R_c e R_d . Assim como no caso 4, da estaca barrete, os valores de λ revelaram-se muito altos, entre 4 e 5. Como consequência, os R_d deram resultados extremamente elevados, como mostram os gráficos da direita da Figura 5 (em MN) e as duas últimas colunas da Tabela 2 (em kN). Vê-se também que os R_c têm uma excelente aderência em relação aos RMX dos ensaios dinâmicos (HSDT).

Pela Figura 5 tem-se $\zeta \approx 1,2$, praticamente constante, enquanto λ varia de 3,9 a 5,0 e E de 34 a 41 GPa. Tais fatos mostram que a aplicação da Fórmula dos Dinamarqueses Generalizada a estações da mesma obra, não submetidos a ensaios dinâmicos, pode conduzir a alguma

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



dispersão. Daí sua melhor adequabilidade a estacas de aço.

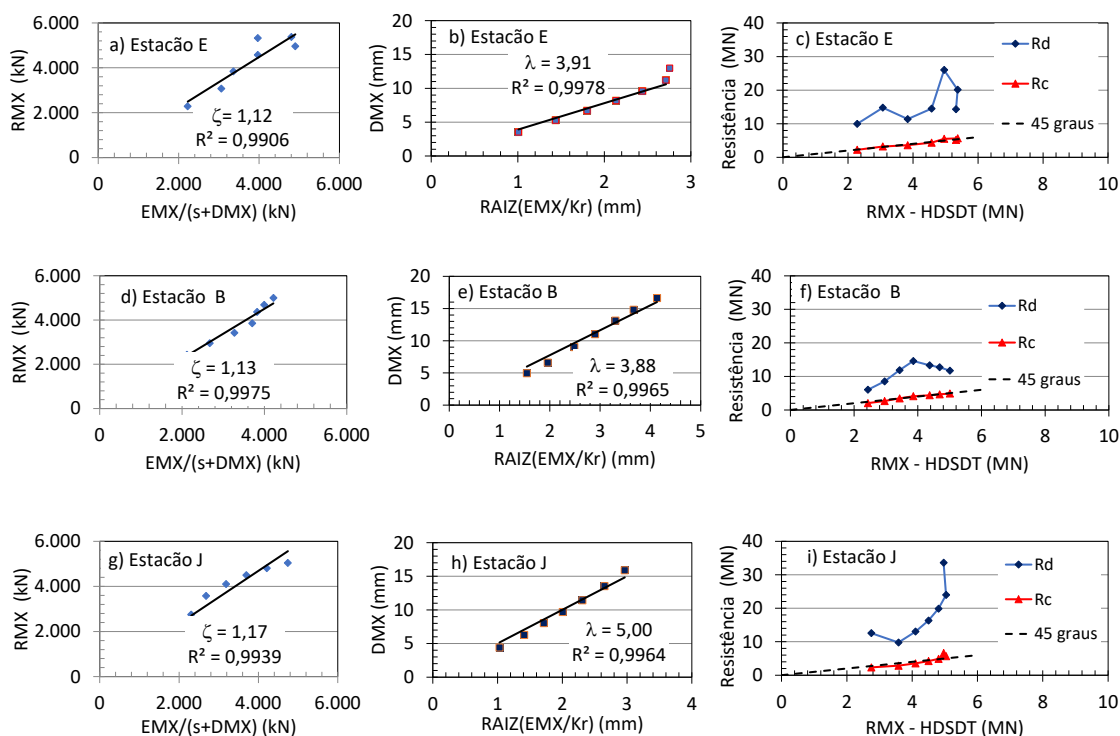


Figura 5: Caso 5, Estações (Sorocaba, SP)

5 Conclusões

Somente a intuição de Sorensen e Hansen justifica o termo $\sqrt{EMX/K_r}$ de sua fórmula, sem nenhuma base racional consistente. Este termo deve ser associado a $DMX=K+s$ e não apenas a K , como propuseram ao admitirem estaca com “ponta fixa”.

A Fórmula dos Dinamarqueses Generalizada, com a incorporação de atritos laterais não nulos e ponta livre ($s \geq 0$), mostrou-se eficaz nas análises de 5 casos de obras. Constatou-se uma excelente aderência entre a resistência calculada (R_c) e os RMX dos HDSDT, inclusive para estacas curtas ($L/B < 30$), que se constituem numa limitação da fórmula original. Os coeficientes ζ de Aoki e λ Querelli, incorporados à fórmula generalizada, se ajustaram perfeitamente aos resultados dos HDSDT, com coeficientes de correlação R^2 acima de 0,99.

Para casos reais de muitas estacas, a aferição de valores médios de λ e ζ através de ensaios dinâmicos pode permitir a extrapolação para estacas não ensaiadas, mas com alguma dispersão, principalmente para estacas de concreto, face à variabilidade no seu módulo de elasticidade (E).

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.





LISTA DE SÍMBOLOS

a	: Constante da Equação (8)	Kr	: Coeficiente de rigidez estrutural da estaca (sem o solo)
B	: Diâmetro ou largura mínima da estaca	L	: Comprimento cravado da estaca
C ₂	: Encurtamento elástico da estaca	RMX	: Carga máxima mobilizada no ECD
C ₃	: Compressão elástica do solo da ponta	Rd	: Resistência (Fórmula original dos Dinamarqueses)
D _i ;D _e	: Diâmetros interno e externo da estaca	Rc	: Resistência (Fórmula dos Dinamarqueses Generalizada)
DMX	: Deslocamento Máximo no ECD	R ²	: Coeficiente de determinação de correlações
E	: Módulo de Young da estaca	S	: Área da seção transversal da estaca
ECD	: Ensaio de Carregamento Dinâmico (HSDT)	s	: Nega
EMX	: Energia Efetiva Máxima do ECD	W	: Peso do martelo
F	: Força axial dinâmica	η	: Eficiência do sistema de cravação
F ₀	: Força axial dinâmica no topo	κ	: Coeficiente de Paikowsky & Chernauskas
h	: Altura de queda do martelo	λ	: Coeficiente da Equação (10) de Querell
HSDT	High Strain Dynamic Tests -	ζ	: Coeficiente da Equação (3) de Aoki
K	: Repique elástico dinâmico		

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aoki N. (1997) *Determination of the ultimate load capacity of driven piles in dynamic increasing energy loading test*. (Unpublished doctoral dissertation) – Escola de Engenharia Civil da USP.
- Likins, G.E., Fellenius, B.H., & Holtz, R.D. (2012). Pile driving formulas: past and present. In *Proceedings of the GeoCongress 2012* (pp. 737-753), Oakland, California. <http://dx.doi.org/10.1061/9780784412084.0051>.
- Machado, J. R.(1995). *A Avaliação da Capacidade de Carga de Estacas, Com Base No Repique Elástico Medido No Final da Cravação*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Massad, F. (2021) *Dynamic driving formulas and static loadings in the light of wave equation solutions*. Soils and Rocks. v.44, p.1 - 11, 2021.
- Paikowsky, S. G. & Chernauskas, L. R. (1992). Energy Approach for capacity evaluation of driven piles. Proc. *4th International Conf. on the Application of Stress-Wave Theory to Piles*, Rotterdam, p. 21-24.
- Querelli, A.E. e Massad, F. (2019). *An Alternative Method to Estimate the Effective Energy During Pile Driving Based on Set and Elastic Rebound Records*. Soils and Rocks, v.42, p.179 - 189.
- Querelli, A.E. (2019). *Monitoração dinâmica na cravação de estacas. Aplicabilidade da Equação de Energy Approach e Estimativas das tensões de compressão*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, 374 páginas.

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



sefe 10

- Querelli, A.E. e Souza, T. J. (2023) *Predicting driving transferred energy without needing the hammer efficiency: three case studies*. Technical Note, Soils and Rocks 46(2), p. 1-6
- Sorensen, T.; Hansen, B. (1957) Pile driving formulae – an investigation based on dimensional considerations and a statistical analysis. In: *4th International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Proceedings, England, 1957*, p. 61-65.
- Valverde, S. (2023). Comunicação pessoal.
- Valverde, S. (2023). Comunicação pessoal.
- Valverde, R. and Massad, F. (2018). *Maximum Envelope of Lateral Resistance through Dynamic Increasing Energy Test in Piles*. Soils and Rocks, v.41, p.75 – 89.
- Vieira, S.H.A. e Lopes, F.R, (2021) *Limitations of the Danish driving formula for short piles*. Technical Note, Soils and Rocks September, 44(2), p.1-6.

Aponte a câmera do seu
smartphone para o
QR Code ao lado e salve o
evento na sua agenda.



Realização:



Avenida Rebouças, 353, Sala 74 A
Cerqueira César, São Paulo/SP, 05401-900
Telefone: (11) 3052-1284
E-mail: abef@abef.org.br

Organização:



Avenida T-9, 2310 - Ed. Inove Intelligent Place
Sala B701, Jardim América, Goiânia/GO, 74255-220
E-mail: secretaria@qeeventos.com.br
Site: www.qeeventos.com.br